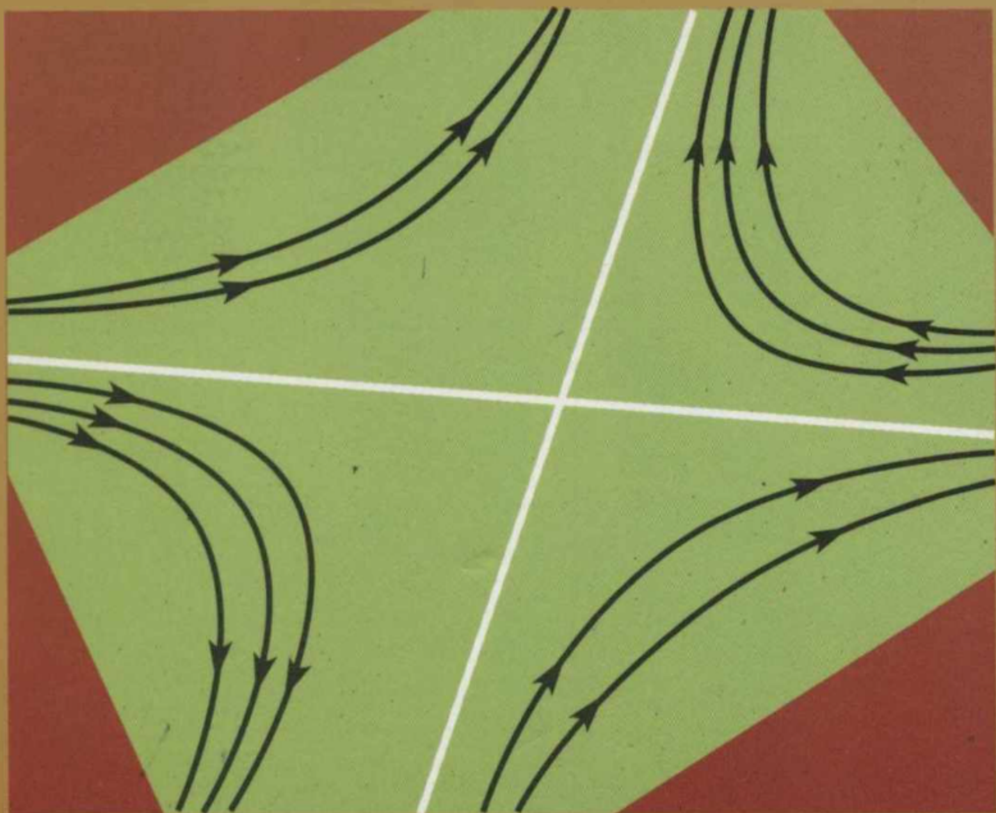
NGUYỄN THẾ HOÀN - PHẠM PHU

CƠ SỞ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT ỔN ĐỊNH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN THẾ HOÀN – PHẠM PHU

CƠ SỞ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT ỔN ĐỊNH

(Tái bản lần thứ sáu)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cũng như các môn khoa học khác, phương trình vi phân xuất hiện trên cơ sở phát triển của khoa học, kĩ thuật và những yêu cầu dòi hỏi của thực tế. Đã có những tài liệu, giáo trình dề cập đến những bài toán cơ học, vật lý dẫn đến sự nghiên cứu các phương trình vi phân tương ứng. Ở dây chúng tôi muốn giới thiệu với bạn dọc một ví dụ về một ứng dụng của phương trình vi phân trong sinh học. Giả sử ta cần nghiên cứu sự phát triển của một quần thể. Gọi x(t) là mật dộ của quần thể ở thời diểm t, $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}$ *là tốc dộ phát triển của quần thể. Tại mỗi thời diểm t, tốc dộ phát triển nói chung tỉ lệ với số lượng của quần thể tức là với mật dộ của nó :* $\dot{x} = h(t)x$ *(chẳng hạn, số lượng càng nhiều càng lắm con). Nhưng tại mỗi thời diểm t một số con vật của quần thể cũng chết di (do bệnh tật hoặc bị các loài khác ăn thịt). Và số lượng con vật "chết di" này cũng tỉ lệ với mật dộ của quần thể. Do dó tốc dộ phát triển của quần thể dược viết một cách chính xác hơn dưới dạng*

$$\dot{x} = x(k(t) - h(t)x) \qquad (*)$$

Đại lượng $k(t) - h(t)x$ *dược gọi là tốc dộ phát triển riêng của quần thể. Nếu quần thể phát triển chưa đến* *mức tới hạn (chẳng hạn môi trường còn cung cấp đầy đủ thức ăn cho quần thể) thì tốc độ phát triển riêng $k(t) - h(t)x > 0$. Nếu quần thể phát triển quá mức tới hạn thì $k(t) - h(t)x < 0$ (chẳng hạn do môi trường không thể cung cấp đầy đủ thức ăn).*

Phương trình (*) là một phương trình vi phân cấp một và thường được gọi là phương trình logistic. Việc nghiên cứu phương trình (*) có một ý nghĩa quan trọng trong sinh thái học.

Thời gian qua ở trong nước ta đã xuất hiện một số giáo trình phương trình vi phân (xem [1], [2]). Nhưng các giáo trình này in đã lâu và có hạn nên hiện nay trên thị trường không còn nữa. Để đáp ứng nhu cầu bạn đọc, nhất là đối với tầng lớp sinh viên, chúng tôi viết giáo trình này nhằm cung cấp tương đối đầy đủ những kiến thức cơ bản của lí thuyết cơ sở phương trình vi phân và đi sâu hơn, những kiến thức cơ bản của lí thuyết ổn định nghiệm phương trình vi phân.

Chương I và chương II của phần một chủ yếu trình bày các phương pháp giải phương trình vi phân cấp một cũng như cách tìm nghiệm kì dị và quỹ đạo đẳng giác. Chương III giới thiệu một số phương trình vi phân cấp n có thể giải được hoặc hạ thấp cấp được. Chương IV trình bày lí thuyết tổng quát của phương trình tuyến tính cấp n và từ đó suy ra cấu trúc nghiệm tổng quát của lớp phương trình này.

Chương V chỉ ra một số phương trình vi phân tuyến tính cấp n mà đối với chúng, ta có thể xây dựng *được nghiệm tổng quát bằng một biểu thức tường minh. Cũng ở chương này một vấn đề nhỏ của lí thuyết định tính phương trình vi phân được đề cập đến. Đó là vấn đề dao động nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai.*

Phần đầu của chương VI trình bày phương pháp giải hệ phương trình vi phân và chứng minh định lí tồn tại, duy nhất nghiệm của bài toán Côsi. Nhờ sự liên hệ giữa hệ n phương trình vi phân cấp một với một phương trình vi phân cấp n, từ đây suy ra định lý tồn tại và duy nhất nghiệm đối với phương trình vi phân cấp n đã phát biểu mà không chứng minh ở chương III. Phần tiếp theo của chương VI trình bày lí thuyết tổng quát về hệ phương trình vi phân tuyến tính và từ đó suy ra cấu trúc nghiệm của chúng. Cuối cùng, chỉ ra cách xây dựng nghiệm tổng quát dưới biểu thức tường minh của hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng.

Bắt đầu từ chương I phần hai, chúng tôi muốn giới thiệu đến bạn đọc một trong những phương hướng cơ bản của lí thuyết định tính phương trình vi phân có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Đó là sự ổn định của nghiệm. Cần nói rằng trong khuôn khổ một phần của một cuốn sách chúng tôi không có tham vọng đi sâu và trình bày đầy đủ lí thuyết ổn định mà chủ yếu muốn giới thiệu với bạn đọc những khái niệm cơ bản nhất và một số kết quả kinh điển nhất của lí thuyết này.

Trong lần tái bản này, cuốn sách đã được sửa chữa khá nhiều lỗi in ấn và một số sai sót về tính toán. Các tác giả chân thành cảm ơn TS. Trịnh Tuấn Anh và Th.S Nguyễn Trọng Hải đã có những nhận xét và góp ý quý báu để cuốn sách hoàn thiện tốt hơn. Tuy nhiên vẫn không thể tránh khỏi những sai sót trong cách trình bày cuốn sách. Chúng tôi rất mong nhận được những góp ý xây dựng của bạn đọc gần xa. Xin chân thành cảm ơn trước.

Thư từ xin gửi về địa chỉ :

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam – 81 Trần Hưng Đạo – Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

Phần một

CƠ SỞ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chương I

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

§1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Định nghĩa. Phương trình vi phân cấp một có dạng tổng quát :

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

trong đó hàm F xác định trong miền $D \subset \mathbf{R}^3$.

Nếu trong miền D, từ phương trình (1.1) ta có thể giải được y' :

$$y' = f(x, y) \tag{1.2}$$

thì ta được phương trình vi phân cấp một đã giải ra đạo hàm.

Hàm $y = \varphi(x)$ xác định và khả vi trên khoảng I = (a, b) được gọi là *nghiệm* của phương trình (1.1) nếu

a) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ với mọi $x \in I$

b) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ trên I.

Ví dụ 1. Phương trình

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

có nghiệm là hàm $y = ce^{2x}$ xác định trên khoảng $(-\infty, +\infty)$ (c là hằng số tùy ý).

Ví dụ 2. Phương trình

$$y' = 1 + y^2 \tag{1.3}$$

có nghiệm là hàm y = tgx xác định trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Có thể kiểm tra trực tiếp hàm y = tg(x + c) với mỗi hằng số c cố định cũng là nghiệm của phương trình (1.3) trên khoảng xác định tương ứng.

Chú ý. Nhiều khi người ta viết phương trình đã giải ra đạo hàm dưới dạng đối xứng sau :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{1.4}$$

Chúng ta dễ dàng thấy sự tương đương giữa cách viết (1.2) và (1.4).

2. Bài toán Côsi. Qua ví dụ 1 và ví dụ 2 ta thấy rằng nghiệm của phương trình vi phân cấp một là vô số. Tập hợp nghiệm của phương trình vi phân cấp một phụ thuộc vào một hằng số tùy ý c. Trong thực tế người ta thường quan tâm đến nghiệm của phương trình vi phân cấp một thỏa mãn những điều kiện nào đấy. Chẳng hạn tìm nghiệm y(x) của phương trình (1.1) hoặc (1.2) thỏa mãn điều kiện

$$y(x_o) = y_o \tag{1.5}$$

trong đó x_o, y_o là các số cho trước.

Điều kiện (1.5) được gọi là *điều kiện ban đầu*. Bài toán tìm nghiệm của phương trình (1.1) hoặc (1.2) thỏa mãn điều kiện ban đầu (1.5) được gọi là *bài toán Côsi*. Sau này chúng ta sẽ thấy với những điều kiện nào thì nghiệm của bài toán Côsi là tồn tại và duy nhất.